

Lema de Selberg e aplicações (em construção)

Lucas H. R. de Souza, Samuel Quirino

Julho de 2024

Em 2015, Étienne Ghys ministrou, brilhantemente, no IMPA um minicurso intitulado Escola de Altos Estudos: My Favorite Groups. A cada aula ele apresentava, como o nome sugere, um de seus grupos favoritos e os motivos que faziam esse grupo ser interessante. Essas aulas foram gravadas e estão presentes no canal do Youtube do IMPA (sério, assistam!). Algo chamou a atenção em uma parte da aula 6 (o link pode ser conferido em [11]). neste momento ele apresenta e demonstra o Lema de Selberg:

Teorema. (*Lema de Selberg*) *Se G é um subgrupo finitamente gerado de $GL(n, \mathbb{C})$, então G possui um subgrupo H de índice finito e livre de torção.*

Este minicurso foi inspirado nesta aula.

Conteúdo

1	Lema de Selberg	3
1.1	Grupos de matrizes	3
1.2	Extensões de corpos (em construção)	5
1.3	Demonstração do teorema (em construção)	6
1.4	Um exemplo que leva à Teoria de Bass-Serre	6
1.5	Os grupos de Gupta-Sidki	7
2	Grupo fundamental e espaços de recobrimento	9
2.1	Grupo fundamental	9
2.2	Espaços de recobrimento	11
2.3	Ações de grupos e recobrimentos	13
2.4	Ações em variedades	13
3	Geometria hiperbólica	15
3.1	Modelo do disco de Poincaré (para quem gosta de visualizar tudo ao mesmo tempo)	15
3.2	Modelo do semi-plano (as vezes é útil também)	16
3.3	Modelo projetivo (para quem gosta de álgebra linear)	16
3.4	Equivalência entre os modelos	17
3.5	Variedades hiperbólicas	18
3.6	Ações discretas de grupos de isometrias	18
3.7	Tesselações	19
3.8	O exemplo de Kapovich	20
3.9	O Teorema de Bieberbach	21
	Referências	22

1 Lema de Selberg

1.1 Grupos de matrizes

Definição 1.1. *Seja K um corpo. Denotemos por $GL(n, K)$ o grupo das matrizes $n \times n$ inversíveis com entradas em K , com a operação de multiplicação de matrizes. O grupo especial linear $SL(n, K)$ é o subgrupo de $GL(n, K)$ dado pelas matrizes de determinante 1.*

Definição 1.2. *Denotemos por $SL(n, \mathbb{Z})$ o conjunto de matrizes de entradas inteiras e determinante 1.*

Note que se A é uma matriz inversível, então $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C$, com C a matriz de cofatores de A . Se A possui entradas inteiras, então C também possui entradas inteiras, pois suas entradas consistem em determinantes de menores de A . Sendo assim, se $A \in SL(n, \mathbb{Z})$, então $\det(A) = 1$, o que implica que A^{-1} também possui entradas inteiras, e portanto $A^{-1} \in SL(n, \mathbb{Z})$. É imediato que a matriz identidade está em $SL(n, \mathbb{Z})$ e, se $A, B \in SL(n, \mathbb{Z})$, então $AB \in SL(n, \mathbb{Z})$. Portanto $SL(n, \mathbb{Z})$ é um subgrupo de $SL(n, \mathbb{R})$.

Definição 1.3. *Seja N o conjunto das matrizes $n \times n$ da forma $k Id$, com $k \in K - \{0\}$. É imediato que N é um subgrupo normal de $GL(n, K)$. O grupo projetivo linear é dado por $PGL(n, K) = GL(n, K)/N$.*

Seja N_1 o conjunto das matrizes $n \times n$ da forma $k Id$, com $k \in K$ e $k^n = 1$. É imediato que N_1 é um subgrupo normal de $SL(n, K)$. O grupo projetivo especial linear é dado por $PSL(n, K) = SL(n, K)/N_1$.

Se $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , a imagem de $SL(n, \mathbb{Z})$ em $PSL(n, K)$ pelo mapa quociente é denotada por $PSL(n, \mathbb{Z})$. Para $n = 2$, tal grupo é chamado de grupo modular.

Proposição 1.4. $PGL(n, \mathbb{C}) \cong PSL(n, \mathbb{C})$.

Demonstração. Temos que $SL(n, \mathbb{C})N = GL(n, \mathbb{C})$ e $SL(n, \mathbb{C}) \cap N = N_1$. Temos, por algum Teorema do Isomorfismo, que $\frac{SL(n, \mathbb{C})N}{N} \cong \frac{SL(n, \mathbb{C})}{SL(n, \mathbb{C}) \cap N}$. Mas $\frac{SL(n, \mathbb{C})N}{N} = \frac{GL(n, \mathbb{C})}{N} = PGL(n, \mathbb{C})$ e $\frac{SL(n, \mathbb{C})}{SL(n, \mathbb{C}) \cap N} = \frac{SL(n, \mathbb{C})}{N_1} = PSL(n, \mathbb{C})$. Portanto $PGL(n, \mathbb{C}) \cong PSL(n, \mathbb{C})$. \square

Proposição 1.5. *Suponha $K = \mathbb{R}$. Se n é par, então $N_1 = \{id, -id\}$. Se n é ímpar, então $N_1 = \{id\}$.*

Portanto $PSL(n, \mathbb{R}) \cong SL(n, \mathbb{R})$, se n for ímpar.

Exercício 1.6. *Seja $Mob(\mathbb{C})$ o grupo formado pelas transformações de Möbius do plano e considere o seguinte mapa:*

$$\psi : PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Mob(\mathbb{C})$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow (z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d})$$

Então ψ está bem definido e é um isomorfismo de grupos.

Exercício 1.7. Seja $Mob^+(\mathbb{R})$ o grupo formado pelas transformações de Möbius do plano, da forma $(z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d})$, com entradas reais e tais que $ad - bc > 0$ e considere o seguinte mapa:

$$\psi : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow Mob^+(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow (z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d})$$

Então ψ está bem definido e é um isomorfismo de grupos.

Proposição 1.8. $SL(n, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado.

Corolário 1.9. $PSL(n, \mathbb{Z})$ é finitamente gerado.

Demonstração. Segue do fato que $PSL(n, \mathbb{Z})$ é um quociente de $SL(n, \mathbb{Z})$. \square

Seja \langle, \rangle uma forma bilinear em \mathbb{R}^n . O teorema de inércia de Sylvestre nos diz que a forma é unicamente determinada, aa menos de mudança de base, por três valores, $p, q, r \in \mathbb{N}$ tais que $p+q+r = n$. Esses valores são dados por, fixada uma base ortonormal de \mathbb{R}^n com respeito a \langle, \rangle , p é o número de elementos da base tais que a forma aplicada nele com ele mesmo dá $+1$, q é o número de elementos da base tais que a forma aplicada nele com ele mesmo dá -1 e r é o número de elementos da base tais que a forma aplicada nele com ele mesmo dá 0 (veja [16] para mais detalhes). A tripla (p, q, r) é chamada assinatura da forma. Denotemos por $\mathbb{R}^{p,q,r}$ o espaço \mathbb{R}^n munido com uma forma bilinear de assinatura (p, q, r) . Se a forma for não degenerada, então $r = 0$ e a assinatura é dada por (p, q) (neste caso, omitiremos r em todas as notações).

Definição 1.10. Seja $O(p, q, r)$ o subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ dado pelas matrizes que preservam a forma bilinear (i.e. $A \in O(p, q, r)$ se para todo $v, w \in \mathbb{R}^{p,q,r}$, $\langle A(v), A(w) \rangle = \langle v, w \rangle$). Definimos $SO(p, q, r)$ o subgrupo de $O(p, q, r)$ das matrizes com determinante 1 e

Para nossos propósitos, precisamos apenas de uma forma de assinatura $(n, 1)$. Fixamos a forma dada por:

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}), (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \rangle = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - x_{n+1} y_{n+1}$$

Definição 1.11. Seja $O^+(n, 1)$ o subgrupo das matrizes de $O(n, 1)$ tais que, para todo $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ com $x_{n+1} > 0$, $A(x) = (y_1, \dots, y_{n+1})$ é tal que $y_{n+1} > 0$.

Proposição 1.12. $PO(n, 1) \cong O^+(n, 1)$.

Portanto $PO(n, 1)$ pode ser visto como subgrupo de $O(n, 1)$ e, portanto, subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

1.2 Extensões de corpos (em construção)

Proposição 1.13. *Seja $K \rightarrow K'$ uma extensão de corpos de grau d . Então para todo $n \in \mathbb{N}$, existe monomorfismo $GL(n, K') \rightarrow GL(nd, K)$.*

Demonstração. Seja V um K' -espaço vetorial de dimensão n . Denotemos por $GL(V, K')$ o grupo de isomorfismos lineares de V para V como K' -espaço vetorial. Temos que $GL(V, K') \cong GL(n, K')$. Como K' é uma extensão de K de grau d , segue que V é um K -espaço vetorial de dimensão nd . Se $GL(V, K)$ o grupo de isomorfismos lineares de V para V como K -espaço vetorial, então $GL(V, K) \cong GL(nd, K)$. Mas toda transformação linear de V para V como K' -espaço vetorial também é linear como K -espaço vetorial, o que implica que temos uma inclusão $GL(V, K') \rightarrow GL(V, K)$. Compondo com os isomorfismos apresentados, segue o monomorfismo procurado. \square

1.3 Demonstração do teorema (em construção)

Lema 1.14. *Seja $K \rightarrow K'$ uma extensão algébrica. Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $G < GL(n, K)$ finitamente gerado, existe $H < G$ de índice finito e livre de torção. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $G < GL(n, K')$ finitamente gerado, existe $H < G$ de índice finito e livre de torção.*

Demonstração. Seja $G < GL(n, K')$ finitamente gerado. Se d o grau da extensão $K \rightarrow K'$. Pela **Proposição 1.13**, existe monomorfismo $GL(n, K') \rightarrow GL(nd, K)$. Como G é isomorfo a um subgrupo de $GL(nd, K)$, segue que existe $H < G$ de índice finito e livre de torção. \square

Teorema 1.15. *(Lema de Selberg) Seja G um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ finitamente gerado. Então G possui subgrupo normal de índice finito e livre de torção.*

Corolário 1.16. *(Teorema de Burnside) Seja G um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$. Se G é finitamente gerado e de torção, então G é finito.*

(contraexemplo quando G não é finitamente gerado: o grupo de rotações racionais do plano).

1.4 Um exemplo que leva à Teoria de Bass-Serre

Mesmo com o Lema de Selberg garantindo a existência de um subgrupo de índice finito e livre de torção de um grupo finitamente gerado $G < GL(n, \mathbb{C})$, pode não ser fácil encontrar esse subgrupo. Porém, para $SL(n, \mathbb{Z})$ é bem simples achar tal subgrupo.

Considere a seguinte sequência exata curta:

$$1 \longrightarrow \ker f_p \longrightarrow SL(n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{f_p} SL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

Em que f_p é a aplicação quociente.

Temos que $SL(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ é um grupo finito, o que implica que $\ker f_p$ possui índice finito em $SL(n, \mathbb{Z})$ e é livre de torção.

Para $n = 2$, é possível conseguir ainda mais informação:

Proposição 1.17. *Se $n = 2$ e $p \geq 3$, então $\ker f_p$ é livre.*

Veja [7] para a demonstração completa. O argumento baseia-se no seguinte fato:

Teorema 1.18. *Um grupo é livre se e somente se ele age livremente em uma árvore.*

Observação. *Daí segue como corolário o Teorema de Nielsen-Schreier: Subgrupos de grupos livres são livres. Demonstre esse teorema a partir do teorema anterior.*

Portanto nos resta achar uma ação livre de $\ker f_p$ em uma árvore. Tal ação vem de uma ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ na árvore de Farey. Essa árvore é construída no plano hiperbólico (veja **Seção 3** para a definição de plano hiperbólico) e a ação vem da ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ no plano hiperbólico via isometrias. Consulte [7] para a construção dessa árvore.

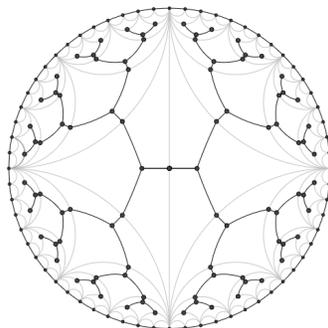


Figura 1: Árvore de Farey truncada na quarta iteração

A Teoria de Bass-Serre generaliza esse teorema sobre grupos livres, dando uma correspondência entre ações de grupos em árvores e decomposições de grupos em combinações de produtos amalgamados e extensões HNN. No caso da ação de $SL(2, \mathbb{Z})$ na árvore de Farey e da ação induzida de $PSL(2, \mathbb{Z})$ na mesma árvore, a Teoria de Bass-Serre nos dá apresentações para os grupos:

$$SL(2, \mathbb{Z}) \cong \langle a, b | a^4, b^6, a^2b^{-3} \rangle$$

$$PSL(2, \mathbb{Z}) \cong \langle a, b | a^2, b^3 \rangle$$

Infelizmente, o mesmo não pode ser feito para $n \geq 3$, pois, neste caso, toda ação de $SL(n, \mathbb{Z})$ em uma árvore possui ponto fixo (o que está em correspondência com alguma decomposição trivial do grupo).

Não é nosso objetivo apresentar aqui a Teoria de Bass-Serre (quem sabe em uma próxima?). Para os interessados, a teoria clássica está bem desenvolvida em [24].

1.5 Os grupos de Gupta-Sidki

O problema de Burnside afirma que, se um grupo finitamente gerado é de torção, então o grupo precisa ser finito. Evgeny Golod and Igor Shafarevich provaram em [13] que essa conjectura é falsa. Observe que um grupo com tais propriedades não pode ser um subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$, pelo Lema de Selberg. Não mostraremos tal exemplo, mas mostraremos uma família de grupos com a mesma natureza.

Seja p um número primo. Então existe um grupo infinito e gerado por dois elementos tal que todo elemento possui ordem potência de p . Tais grupos

foram construídos por Narain Gupta e Said Sidki [14] e são construídos como automorfismos de árvores.

(em breve a construção do grupo)

2 Grupo fundamental e espaços de recobrimento

Para uma versão do conteúdo dessa seção que não seja absurdamente resumida, recomendamos [21] e [19].

2.1 Grupo fundamental

Definição 2.1. *Sejam X um espaço topológico e $\gamma, \gamma' : [0, 1] \rightarrow X$ dois caminhos com $\gamma(0) = \gamma'(0) = a$ e $\gamma(1) = \gamma'(1) = b$. Uma homotopia de caminhos de γ para γ' é uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que, para todo $s, t \in [0, 1]$, $H(s, 0) = \gamma(s)$, $H(s, 1) = \gamma'(s)$, $H(0, t) = a$ e $H(1, t) = b$. Se existe tal homotopia de caminhos, dizemos que γ e γ' são homotópicos por caminhos e denotamos por $\gamma \cong_H \gamma'$.*

Proposição 2.2. *Fixados a e b em X , homotopia de caminhos forma uma relação de equivalência entre caminhos de a para b .*

Proposição 2.3. *Sejam γ, γ' caminhos de a para b e δ, δ' caminhos de b para c . Se $\gamma \cong_H \gamma'$ e $\delta \cong_H \delta'$, então $\gamma * \delta \cong_H \gamma' * \delta'$.*

Portanto a operação de concatenação está bem definida nas classes de homotopia por caminhos.

Proposição 2.4. *(Associatividade) Sejam γ caminho de a para b , δ , caminhos de b para c e λ caminho de c para d . Então $(\gamma * \delta) * \lambda \cong_H \gamma * (\delta * \lambda)$.*

Temos então que a concatenação, apesar de não ser associativa (verifique!), é associativa a menos de homotopia de caminhos. O mesmo vale para elementos neutros e inversos:

Proposição 2.5. *(Elementos neutros) Sejam γ caminho de a para b e e_c o caminho constante igual ao ponto c . Então $e_a * \gamma \cong_H \gamma$ e $\gamma * e_b \cong_H \gamma$.*

Seja γ um caminho de a para b . Definimos $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ por $\bar{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$.

Proposição 2.6. *(Inverso) Seja γ um caminho de a para b . Então $\gamma * \bar{\gamma} \cong e_a$ e $\bar{\gamma} * \gamma \cong e_b$.*

As proposições anteriores nos permitem definir o seguinte objeto:

Definição 2.7. *Seja $\pi_1(X, p)$ o conjunto de classes de equivalência de loops com ponto base p . Assim, $(\pi_1(X, p), *)$ é um grupo chamado grupo fundamental de X com ponto base p .*

Definição 2.8. *Sejam X um espaço topológico, $p, q \in X$ e α um caminho entre p e q . Então o caminho α induz um mapa $\alpha_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(X, q)$ definido por $\alpha_*([\gamma]) = [\alpha * \gamma * \bar{\alpha}]$.*

Proposição 2.9. *O mapa α_* é um isomorfismo.*

Portanto, se X é conexo por caminhos, então pode-se dizer que o grupo fundamental, a menos de isomorfismos, não depende do ponto base. Porém é necessário um cuidado: esse isomorfismo α_* não é único e não é natural, pois depende da escolha do caminho α .

Exemplos 2.10. *Alguns grupos fundamentais de espaços topológicos.*

1. $\pi_1(\mathbb{R}^n, p) \cong 1$.
2. Se X é um subconjunto estrelado de \mathbb{R}^n , i.e. existe p em X tal que para todo q em X o segmento de reta entre p e q está contido em X , então $\pi_1(X, p) \cong 1$.
3. $\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$.
4. $\pi_1(S^n, p) \cong 1$, para $n \geq 2$.
5. Se X é uma árvore, então $\pi_1(X, p) \cong 1$.
6. $\pi_1(\mathbb{R}P^n, p) \cong \mathbb{Z}_2$, para $n \geq 2$.
7. $\pi_1(\mathbb{C}P^n, p) \cong 1$.
8. Se X e Y são espaços topológicos, com $p \in X$, $q \in Y$, então temos o grupo fundamental $\pi_1(X \times Y, (p, q)) \cong \pi_1(X, p) \times \pi_1(Y, q)$.
9. Como caso particular do anterior, se T é o toro, então $\pi_1(T, p) \cong \mathbb{Z}^2$.
10. $\pi_1(S_g, 1) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \dots \cdot [a_g, b_g] \rangle$, em que S_g é a superfície compacta orientável de gênero g .
11. Se G é um grupo topológico, então $\pi_1(G, 1)$ é abeliano. Com isso é possível mostrar que muitos espaços não possuem estrutura de grupo topológico.

Definição 2.11. *Sejam X e Y espaços topológicos, $p \in X$ e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Então f induz um mapa $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ definido por $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ (verifique que está bem definido!).*

Proposição 2.12. *O mapa f_* é um homomorfismo.*

Proposição 2.13. *Se X é um espaço topológico, então $(id_X)_* = id$.*

Proposição 2.14. *Se X, Y, Z são espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ são funções contínuas, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Para os amantes de categorias, isso tem a seguinte interpretação: se Top_* é a categoria cujos objetos são espaços topológicos com ponto base e os morfismos são funções contínuas que preservam ponto base, então o grupo fundamental pode ser visto como um funtor covariante da categoria Top_* para a categoria de grupos.

Definição 2.15. *Dizemos que um espaço topológico X é simplesmente conexo se é conexo por caminhos e $\pi_1(X, p) \cong 1$.*

Exemplos 2.16. *Os exemplos 1, 2, 4, 5 e 7 acima são espaços simplesmente conexos enquanto os exemplos 3, 6, 9 e 10 não são.*

2.2 Espaços de recobrimento

Definição 2.17. *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que f é uma aplicação de recobrimento se para todo $q \in Y$ existe uma vizinhança aberta U de q tal que $f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in \Gamma} V_i$, com $\{V_i\}_{i \in \Gamma}$ abertos disjuntos de X tais que para todo $i \in \Gamma$, o mapa $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ é homeomorfismo. Chamamos o conjunto U com tal propriedade de vizinhança trivializadora de q .*

Exemplos 2.18. *Algumas aplicações de recobrimento.*

1. *Se X é um espaço topológico, então $id_X : X \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento.*
2. *O mapa $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definido por $f(t) = e^{it}$, com S^1 identificado com o conjunto dos números complexos de módulo igual a 1, é uma aplicação de recobrimento.*
3. *Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : W \rightarrow Z$ são aplicações de recobrimento, então $f \times g : X \times W \rightarrow Y \times Z$ é aplicação de recobrimento.*
4. *Juntando os exemplos anteriores, é fácil construir um exemplo de recobrimento da forma $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$, com X o toro ou o cilindro.*
5. *A aplicação quociente $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ que identifica os pontos antípodos é uma aplicação de recobrimento.*
6. *De forma semelhante ao exemplo anterior, se C é um cilindro e M é uma faixa de Möbius, então existe uma aplicação de recobrimento $f : C \rightarrow M$.*

Proposição 2.19. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento. Então $f_* : \pi_1(X, p) \rightarrow \pi_1(Y, f(p))$ é injetiva.*

Portanto o grupo fundamental de X pode ser visto como um subgrupo do grupo fundamental de Y .

Definição 2.20. *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento. Dizemos que X é o recobrimento universal de Y se X é simplesmente conexo.*

O que justifica o nome de recobrimento universal é a seguinte propriedade:

Proposição 2.21. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : W \rightarrow Y$ aplicações de recobrimento. Se X é simplesmente conexo, então existe uma aplicação de recobrimento $h : X \rightarrow W$ tal que $f = g \circ h$. Além disso, se W é simplesmente conexo, então h é homeomorfismo.*

Exemplos 2.22. *Alguns recobrimentos universais.*

1. *Nos exemplos anteriores vimos que \mathbb{R} é o recobrimento universal de S^1 , \mathbb{R}^2 é o recobrimento universal do toro, e do cilindro e S^n é o recobrimento universal de $\mathbb{R}P^n$, com $n \geq 2$.*

2. Se S é uma superfície sem bordo, com $S \neq S^2$ ou $\mathbb{R}P^2$, então o recobrimento universal de S é \mathbb{R}^2 . Tal teorema é consequência direta do Teorema de Uniformização (aquele lá de Análise Complexa [10]).
3. Se M é uma variedade compacta de dimensão 3, podemos não ter um controle sobre o recobrimento universal de M como o exemplo anterior, mas M pode ser decomposta unicamente em uma família de variedades M_1, \dots, M_k tais que o recobrimento universal desses M_i está em uma lista de 8 variedades simplesmente conexas com estrutura geométrica. Isso descreve, por alto, a Conjectura de Geometrização de Thurston que foi demonstrada por Grigori Perelman e que tem como consequência a Conjectura de Poincaré (já referenciamos [5] para isso, lembra?).
4. O recobrimento universal de uma variedade de dimensão n é também uma variedade de dimensão n .
5. Se X é um grafo conexo, então o recobrimento universal de X é uma árvore.
6. O recobrimento universal de um grupo topológico admite estrutura de grupo topológico de tal forma que o mapa de recobrimento passa a ser também um homomorfismo de grupos.

Definição 2.23. Seja X um espaço topológico conexo por caminhos. Dizemos que X é semi-localmente simplesmente conexo se para todo $p \in X$, existe U vizinhança de p tal que todo caminho fechado baseado em p e que está contido em U é homotopicamente nulo em X .

Exemplos 2.24. 1. Variedades, grafos conexos, complexos simpliciais, complexos celulares e todos os espaços minimamente razoáveis são semi-localmente simplesmente conexos.

2. O brinco havaiano não é semi-localmente simplesmente conexo.

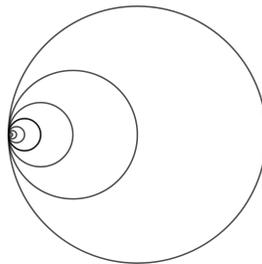


Figura 2: Representação do brinco havaiano com 8 iterações

Proposição 2.25. Seja X um espaço topológico. O espaço X possui recobrimento universal se e somente se X é semi-localmente simplesmente conexo.

2.3 Ações de grupos e recobrimentos

Definição 2.26. *Sejam G um grupo e X um espaço topológico. Uma ação de G em X por homeomorfismos é dita propriamente descontínua se para todo compacto $K \subseteq X$, o conjunto $\{g \in G; gK \cap K \neq \emptyset\}$ é finito.*

Uma ação de G em X por homeomorfismos é dita uma ação de recobrimento se para todo ponto $p \in X$, existe vizinhança aberta U tal que para todo $g \in G - \{1\}$, $gU \cap U = \emptyset$.

Proposição 2.27. *Se X é localmente compacto, então ações de recobrimento em X são propriamente descontínuas.*

Proposição 2.28. *Uma ação de G em X por homeomorfismos é uma ação de recobrimento se e somente se o mapa quociente $f : X \rightarrow X/G$, em que X/G carrega a topologia quociente, é uma aplicação de recobrimento.*

De fato, uma aplicação de recobrimento $f : X \rightarrow Y$ vem de uma ação de grupos em X se e somente se $\text{Im } f_*$ é um subgrupo normal de $\pi_1(Y, f(p))$, com $p \in X$. Mas não precisamos entrar nesse nível de detalhes. O que precisamos é o seguinte caso particular:

2.4 Ações em variedades

Proposição 2.29. *Seja G um grupo com uma ação de recobrimento em uma variedade X . Então X/G é uma variedade (de mesma dimensão).*

Mas geralmente o que aparece é uma ação propriamente descontínua. E, neste caso, o quociente X/G não vai ser uma variedade, pois pode ter alguns pontos de singularidade. Pontos esses que vêm de pontos em X que possuem estabilizadores não triviais. Estabilizadores esses que devem ser sempre finitos:

Proposição 2.30. *Seja G um grupo com uma ação propriamente descontínua em um espaço X . Se $p \in X$, então $\text{Stab } p < \infty$.*

Esse problema com estabilizadores não triviais some se o grupo não tiver esses subgrupos finitos. De fato temos:

Proposição 2.31. *Seja G um grupo com uma ação propriamente descontínua em um espaço X . Se a ação for livre, então ela é uma ação por recobrimentos.*

Corolário 2.32. *Seja G um grupo com uma ação propriamente descontínua em um espaço X . Se G é livre de torção, então a ação é por recobrimentos.*

Portanto tais ações são muito mais simples de serem entendidas quando o grupo é livre de torção.

Quando o grupo G possui um subgrupo H normal de índice finito e que é livre de torção e G age em X propriamente descontinuamente, então podemos fazer H agir em X , essa ação é por recobrimentos (pois H é livre de torção) e G/H age em X/H , cujo quociente é X/G . Portanto o mapa quociente $X \rightarrow X/G$

pode ser decomposto em um mapa de recobrimento $X \rightarrow X/H$ e um quociente $X/H \rightarrow X/G$ dado pela ação de um grupo finito (G/H).

Caso X/G seja compacto, temos que X/H é compacto, o que implica que X é o recobrimento universal de um compacto (o que muitas vezes é bastante útil). Veremos na próxima seção esse tipo de comportamento aparecer quando geometria e o Lema de Selberg se misturam.

3 Geometria hiperbólica

Considere o quinto axioma de Euclides [9]:

“É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos”.

Que posteriormente mostrou-se equivalente ao que hoje é mais conhecido (Axioma de Playfair):

Dada uma reta r e um ponto P fora dela, existe uma única reta que passam por P e é paralela a r .

Negando o Axioma de Playfair temos:

Dada uma reta r e um ponto P fora dela, existem pelo menos duas retas que passam por P e são paralelas a r .

O caso de não existir reta paralela que passe por P já é descartado pelos axiomas anteriores.

A geometria hiperbólica plana surge ao negar o quinto postulado e ainda manter a consistência da teoria. Resumimos grosseiramente 2300 anos de história, mas os detalhes podem ser vistos em [?]. O ponto é que, para provar a consistência dessa nova geometria, basta criar um modelo para ela, ou seja, um modelo que obedece a todos os outros axiomas e nega o último.

Aqui apresentaremos 3 modelos de geometria hiperbólica plana que são os mais utilizados. Os 3 são equivalentes e como espaços métricos são isométricos. Portanto basta escolher o seu favorito. Recomendamos [4], [22] ou [17] para estudos mais detalhados sobre geometria hiperbólica nesses modelos, assim como [3] para geometria hiperbólica sintética (i.e. via axiomas no lugar de via modelos).

3.1 Modelo do disco de Poincaré (para quem gosta de visualizar tudo ao mesmo tempo)

Considere Δ o conjunto dos elementos de \mathbb{C} com norma menor que 1.

A métrica Riemanniana é dada por $ds = \frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ (isso está aqui só por completude, temos a tranquilidade de não precisar usar).

A métrica induzida pela métrica Riemanniana é dada por $d(z, w) = \log\left(\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|}\right)$

As geodésicas são arcos de circunferência perpendiculares à circunferência de centro na origem e raio 1 e diâmetros da circunferência de centro na origem e raio 1.

O grupo de isometrias, $Isom \Delta$, é dado pelas transformações de Möbius da forma $(z \rightarrow \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}})$ e transformações da forma $(z \rightarrow \frac{a\bar{z}+\bar{c}}{c\bar{z}+\bar{a}})$, ambos satisfazendo

$$|a|^2 - |c|^2 = 1.$$

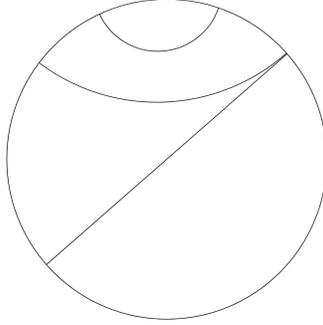


Figura 3: Três geodésicas no modelo do disco do plano hiperbólico

3.2 Modelo do semi-plano (as vezes é útil também)

Considere \mathcal{H}^2 o conjunto dos elementos de \mathbb{C} cuja parte imaginária é positiva.

A métrica Riemanniana é dada por $ds = \frac{|dz|}{\text{Im } z}$.

A métrica induzida pela métrica Riemanniana é dada por $d(z, w) = \log\left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|}\right)$.

As geodésicas são arcos de circunferência cujo centro é um número real e semi-retas paralelas ao eixo imaginário.

O grupo de isometrias, $\text{Isom } \mathcal{H}^2$, é dado pelas transformações de Möbius da forma $(z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d})$ e transformações da forma $(z \rightarrow \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d})$, ambos com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e tais que $ad - bc > 0$. Note que $\text{Mob}^+(\mathbb{R})$ é o grupo de isometrias de \mathcal{H}^2 que preserva orientação e é um subgrupo de $\text{Isom } \mathcal{H}^2$ de índice 2. Lembramos que $\text{Mob}^+(\mathbb{R}) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

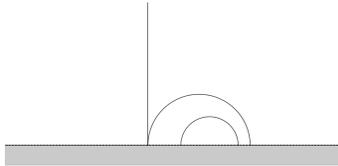


Figura 4: Três geodésicas no modelo do semi-plano do plano hiperbólico

3.3 Modelo projetivo (para quem gosta de álgebra linear)

Considere $\mathbb{R}^{2,1}$ o espaço \mathbb{R}^3 com a forma bilinear de assinatura $(2, 1)$ dada por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

A forma bilinear induz uma decomposição do espaço $\mathbb{R}^{2,1}$ em três conjuntos:

$$V_- = \{v \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle v, v \rangle < 0\}$$

$$V_0 = \{v \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle v, v \rangle = 0\}$$

$$V_+ = \{v \in \mathbb{R}^{2,1} : \langle v, v \rangle > 0\}$$

Observe que os pontos de V_0 são os pontos (x_1, x_2, x_3) que satisfazem a equação $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, que é a equação de um cone. Os pontos de V_- estão dentro do cone, enquanto os pontos de V_+ estão fora do cone.

O plano hiperbólico é definido por PV_- , ou seja, a projetivização de V_- .

Se $v, w \in V_-$, então a distância d entre as classes de v e w é dada por:

$$\cosh^2(d) = \frac{\langle v, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle}$$

Note que d não depende da escolha dos representantes das classes de v e w . Com alguma conta tediosa mostra-se que d é uma métrica em PV_- .

O grupo de isometrias de PV_- é $PO(2, 1)$, ou seja, o grupo das matrizes que preservam a forma bilinear, módulo multiplicação por um escalar não nulo.

Exercício 3.1. *Generalize essa construção para $\mathbb{R}^{n,1}$. Tal espaço será chamado de espaço hiperbólico (real) de dimensão n .*

Observação. *Esse modelo de geometria hiperbólica nos permite fazer uma construção de um novo espaço que é inteiramente análoga a essa, mas que possui uma geometria bem diferente e bastante rica (além de ser, por muitas vezes, bem mais complicada de lidar). Se tomarmos $\mathbb{C}^{n,1}$ o conjunto \mathbb{C}^{n+1} munido de uma forma hermitiana de assinatura $(n, 1)$, podemos definir V_- , projetivizar e definir uma distância de forma análoga à apresentada acima. Com isso, ganhamos o espaço hiperbólico complexo de dimensão n . Veja [12] para mais detalhes.*

3.4 Equivalência entre os modelos

Teorema 3.2. Δ , \mathcal{H}^2 e PV_- são isométricos.

Como os 3 modelos são isométricos, temos que os grupos de isometrias são isomorfos. O que ganhamos aqui é que o terceiro modelo nos diz que esse grupo é $PO(n, 1)$ e que vimos na **Proposição 1.12** que esse grupo é um grupo de matrizes.

Caso não seja necessário deixar explícito qual o modelo de geometria hiperbólica estamos trabalhando, iremos denotar o plano hiperbólico por \mathbb{H}^2 .

3.5 Variedades hiperbólicas

Em geometria Riemanniana, o espaço hiperbólico real \mathbb{H}^n é caracterizado como a única n -variedade simplesmente conexa com uma métrica Riemanniana cuja curvatura seccional é constante igual a -1 .

Se M é uma variedade Riemanniana, existe uma métrica Riemanniana no recobrimento universal \tilde{M} tal que a aplicação de recobrimento $\tilde{M} \rightarrow M$ é isometria local. Além disso, a ação de $\pi_1(M, p)$ em \tilde{M} passa a ser uma ação por isometrias.

Para aqueles que não são muito fãs de geometria Riemanniana, podemos substituir a métrica Riemanniana no parágrafo anterior por uma métrica e fazer algo inteiramente análogo.

No nosso caso, dizemos que uma variedade Riemanniana é hiperbólica se a sua curvatura seccional é constante igual a -1 . Ou, de forma equivalente, se o recobrimento universal de M é isométrico a \mathbb{H}^n .

3.6 Ações discretas de grupos de isometrias

Um caso particular do Lema de Selberg é o seguinte:

Teorema 3.3. *Seja G subgrupo discreto de $Isom \mathbb{H}^n$. Então G possui subgrupo normal de índice finito e livre de torção.*

Podemos interpretar esse teorema da seguinte forma: se G é um subgrupo discreto de $Isom \mathbb{H}^n$, então \mathbb{H}^n/G é orbifold, podendo não ser uma variedade. Mas se $H < G$ é livre de torção, então \mathbb{H}^n/H é uma variedade e o mapa quociente é uma aplicação de recobrimento. Se $[G : H] < \infty$, então $\mathbb{H}^n/G \cong (\mathbb{H}^n/H)/(G/H)$, com G/H finito, ou seja, esse quociente pode ser decomposto em duas partes, sendo a primeira um recobrimento e a outra um quociente de uma variedade pela ação de um grupo finito.

Consideremos agora $n = 2$.

Seja G um grupo discreto de isometrias de \mathbb{H}^2 livre de torção. Temos que G é grupo de superfície (forma curta de dizer: grupo fundamental de uma superfície) e o quociente \mathbb{H}^2/G é a tal superfície.

Se \mathbb{H}^2/G é compacto, então a variedade deve ser um n -toro, com $n > 1$ ou um n -plano projetivo, com $n > 2$. Temos nestes casos que os grupos fundamentais são dados por $\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \mid [a_1, b_1] \cdot \dots \cdot [a_n, b_n] \rangle$, no caso do n -toro, e $\langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^2 \cdot \dots \cdot a_n^2 \rangle$, no caso do n -plano projetivo. Qualquer recobrimento finito de \mathbb{H}^2/G vai ser também uma superfície compacta dessa lista. Algebricamente, temos que todo subgrupo de índice finito de G vai ser isomorfo a um dos grupos fundamentais apresentados acima.

Se \mathbb{H}^2/G não é compacto, então G é um grupo livre com posto finito. Todos os seus subgrupos são livres (Teorema de Nielsen-Schreier). Em particular, os subgrupos de G de índice finito são livres de posto finito (posto esse que depende exclusivamente do posto de G e do índice desse subgrupo, também pelo Teorema de Nielsen-Schreier).

3.7 Tesselações

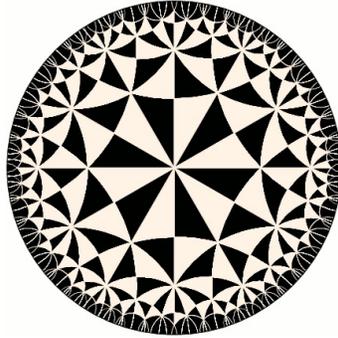


Figura 5: Tesselação do plano hiperbólico por ação de grupo triangular feita por Coxeter



Figura 6: Limite circular I, II, III, IV - Obras em xilogravura de M. C. Escher

3.8 O exemplo de Kapovich

O que ocorre para grupos de isometrias de \mathbb{H}^n generaliza em parte para variedades de curvatura não positiva (não constante) da seguinte forma:

Proposição 3.4. *Seja M uma variedade completa de curvatura não positiva. Então $\pi_1(M, p)$ é livre de torção.*

Portanto, se M é uma variedade de Hadamard e $G < Isom(M)$ é discreto e age livremente em M , então G é livre de torção (o que ocorre da mesma forma que no caso de ações em \mathbb{H}^n). Mas se G é um grupo discreto de isometrias de M cuja ação não é livre, esse grupo pode ter torção. Em \mathbb{H}^n , vimos que tal grupo possui um subgrupo de índice finito livre de torção. Porém, o mesmo não ocorre sempre em curvatura negativa não constante;

Teorema 3.5. *(Kapovich) Para todo $\epsilon > 0$, existe uma variedade de Hadamard M de dimensão n , para $n > 3$, com curvatura seccional entre $-1 - \epsilon$ e -1 e um grupo finitamente gerado discreto Γ_ϵ de isometrias de M que não possui subgrupo de índice finito e livre de torção.*

A construção de tais variedades envolve geometria Riemanniana e teoria de orbifolds, o que foge bastante do escopo deste texto (e do conhecimento dos autores sobre o assunto). Dê uma olhada em [18] para ver essa construção.

3.9 O Teorema de Bieberbach

Teorema 3.6. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de curvatura 0 e de dimensão n . Então, existe um recobrimento finito $\pi : M' \rightarrow M$ tal que M' é um toro de dimensão n .*

A versão algébrica desse teorema é a seguinte:

Corolário 3.7. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta de curvatura 0 e de dimensão n . Então, existe H subgrupo de índice finito de $\pi_1(M, p)$ tal que $H \cong \mathbb{Z}^n$.*

Bieberbach também mostrou que, para n fixado, as classes de isomorfismo desses grupos fundamentais de variedade Riemanniana compacta de curvatura 0 e de dimensão n formam um conjunto finito. Veja [22] para as demonstrações desses fatos.

Referências

- [1] Alperin, Roger C. An elementary account of Selberg’s lemma. *Enseign. Math.* (2) 33 (1987), no. 3-4, 269–273.
- [2] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G. Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, 1969. ix+128 pp. ISBN: 978-0-8133-5018-9; 0-201-00361-9; 0-201-40751-5
- [3] Barbosa, J. L. M. Geometria hiperbólica. Publicações matemáticas, IMPA, 2002. ISBN: 852440194X; 9788524401947
- [4] Beardon, A. F. The geometry of discrete groups. *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, 1983.
- [5] Boileau, M.; Maillot, S.; Porti, J. Three-dimensional orbifolds and their geometric structures. Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, 2003. ISBN: 2-85629-152-X
- [6] do Carmo, M. P. *Geometria Riemanniana*. Quinta edição, Projeto Euclides, IMPA, 2011.
- [7] Office hours with a geometric group theorist. Edited by Matt Clay and Dan Margalit. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017. xii+441 pp. ISBN: 978-0-691-15866-2
- [8] Druţu, C.; Kapovich, M. Geometric Group Theory. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume 63, 2018. ISBN: 9781470411046
- [9] Euclides. Os Elementos. Traduzido por Irineu Bicudo. Editora Unesp. ISBN 978-85-7139-935-8.
- [10] Farkas, H. M.; Kra, I. Riemann Surfaces. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1980. ISBN: 0-387-90465-4; 3-540-90465-4
- [11] Ghys, É. Escola de Altos Estudos: My Favorite Groups - Aula 06, IMPA, 2015. Link: <https://www.youtube.com/watch?v=c-IYMJvibes&t=2189s>
- [12] Goldman, W. M. Complex Hyperbolic Geometry. Oxford mathematical monographs, Clarendon Press, 1999. ISBN: 019853793X; 9780198537939
- [13] Golod, E. S.; Shafarevich, I. R. On the class field tower, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, (1964), Volume 28, Issue 2, 261– 272.
- [14] Gupta, N. D.; Sidki, S. ‘On the Burnside problem for periodic groups’, *Math. Z.* 182 (1983), 385-388.
- [15] Hempel, J. Residual finiteness for 3-manifolds. Combinatorial Group Theory and Topology. Annals of Mathematics Studies, Volume 111, Princeton University Press, 1987. ISBN 0-691-08409-2; 0-691-08410-6

- [16] Hoffman, K.; Kunze, R. Linear Algebra. Second edition. Prentice-Hall, Inc., 1971.
- [17] Iversen, B. Hyperbolic geometry. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1992.
- [18] Kapovich, Michael. A note on Selberg’s lemma and negatively pinched Hadamard manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 120 , N3, pp. 519-531, 2022.
- [19] Lima, E. L. Grupo fundamental e espaços de recobrimento. Segunda edição. Projeto Euclides, Impa, 1998. 214 pp. ISBN: 85-244-0086-2
- [20] Mal’cev, A. I. On isomorphic matrix representations of infinite groups, *Mat. Sb.* 8, 1940, pp. 405–422.
- [21] Munkress, J. *Topology*. Second Edition. Prentice Hall, Incorporated, 2000. 537 pp. ISBN: 9780131816299
- [22] Ratcliffe, John G. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 149. Springer, New York, 2006. xii+779 pp. ISBN: 978-0387-33197-3; 0-387-33197-2
- [23] Selberg, Atle. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces. *Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, pp. 147–164, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1960.
- [24] SERRE, J-P, *Trees*. Springer-Verlag, 1980.
- [25] Tengan, Eduardo; Borges, Herivelto. *Álgebra comutativa em quatro movimentos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 490 pp. ISBN 978-85-244-0398-9